北海道合同教育研究集会 2018

No.4　数学教育分科会報告

成田　收

1　2018 年合同教研（かでる２・７会場）が開かれました

１１月３日（土）４日（日）の２日間、合同教研が札幌市教育文化会館、札幌市資料館、かでる２・７を会場に開催されました。数学教育分科会は 530 号室で３日 13:30 から 16:30、４日 9:30 から 15:00 の実質７時間半にわたって、集中した討議検討を行いました。発表されたレポートは、例年になく少なく、５本でしたので、１本１本について丁寧に発表を聞き議論をすることができました。参加者は２日間で 17 名でした。

2　分科会を巡る状況

分科会には５本のレポートが提出されました。中学校特別支援学級での実践報告、中高一貫教育学校での実践報告、高校学校設置科目「数学に親しむ」の実践報告、高校「ベクトル」教材への提言、元高校教員によるフランス数学教育を巡る状況報告の５本です。
小学校現場からの報告はありませんでした。

近年、教育を巡る状況は益々厳しいものがあります。
教育基本法が改悪され、教育に対する政治的圧力が強まっています。指導要領を見ても、「新しい時代に求められる資質・能力を子供たちに育む」として、

1. 「何ができるようになるか」(育成を目指す資質・能力)
2. 「何を学ぶか」
3. 「どのように学ぶか」(各教科等の指導計画の作成と実施, 学習・指導の改善・充実)
4. 「子供一人一人の発達をどのように支援するか」(子供の発達を踏まえた指導)
5. 「何が身に付いたか」(学習評価の充実)
6. 「実施するために何が必要か」

と書かれ、指導方法にまで細かく規制をかけながら、個々の教師に、育成を目指す資質・能力を常にあきらかにしながら、、実施計画の作文の提出義務が課せられています。

しかも、求められる資質・能力は、生き残りをかけた、限りない競争を強いられる国際社会の中で、為政者から与えられた、国力に寄与するためのコンピテンシー（戦う力）です。さらに、生きづらい、予測不能な世の中で、結果を個人の責任に帰するため、生き残る力、生きる力を獲得することを求められています。

これでは、人としての生きる喜びを求める状況とはかけ離れています。

しかも、指導要領では、多様な人材を求めると言いながら、PISA テスト、TIMSS テストの国際的「評価」に踊らされ、国内では学力テストを全数実施し、都道府県ごとに競わせるという愚策を続けています。まさに、テストのための競争教育に邁進しています。これでは、国際的な人材の開発はできないことを承知しながら、打つ手なしの状態がいつまでも続いています。

結局、人々は、他人から評価されるために学ばされ、その学びに関与しているのが教師ということになるのですから、一人ひとりの笑顔のために頑張る、教師という職業の最も充実した部分は、片隅に追いやられてしまい、教師の職業としての喜びは失われつつあります。

これらの状況から、教師は授業方法は規定され、社会から要請される能力を獲得させることを求められ、結果の説明責任を負わされ、ただひたすら、学力テストの練習問題を解けるように強いられている状況です。子供たちに数学という授業で扱う内容そのものが、楽しく、意味あるものだと伝えることは困難を極めています。また、何が、数学の授業で扱われることによって、数学が、自分自身がまさに欲しようとしている人類の知性の輝きなのだと知らせることができるのかを研究することは不可能に近くなっていると思われます。

しかし、この暗黒の状況に、光を照らすものも、まさにここにあるのだと考えられないでしょうか。
いまこそ、多くの教師が、何を授業に持っていくことが、子供たちの心の奥深くにある好奇心に火をつけ、授業が笑顔で満たされるのか、ということについての研究をし、教育研究会や仲間のサークルで成功例を交流し合い、失敗例に学びあうことが必要なのではないでしょうか。

いつの時代にも、教師と生徒は互いに影響を与え合う中にいます。どんな暴政も、教室が生徒と教師の直接の交流の場であることを壊すことはできません。教育における教師と生徒の接点である「教室」は、人と人の交流の場です。ここには、子供たちに、数学とは何かという真理を伝えることを阻むものはありません。一言でも、1 年間の中の 1 時間でも、その可能性があれば、私たちはこの可能性を生かす道を探る方法を研究すべきです。

合同教研が、その研究の継続のための場所となれば幸いです。
来年は、たくさんの人々が集う合同教研数学教育分科会にしたいと思います。

3　分科会の様子

分科会には、5 本のレポートが提出されました。中学校 1 本、中高一貫教育校 1 本、高等学校 3 本のレポートで、小学校教師によるレポートがなかったことが少々残念に思われました。しかし、内容的に見ると、レポーターの出身母体の偏りを越えて、分科会が、数学教育全般にわたる広く深い議論が展開されるに十分な、本質的な提起を含むレポートが集まりました。
中学校の山田美彦さんのレポートは、かけ算、割り算で計算される文章問題について、中学校特別支援学級での実践を紹介してくれたものです。小学校から高校まで、あるいは大学までの日本の数学教育におけるかけ算、割り算の意味の指導に関わるもので、大変広い視野を持ったものです。
私は、高校の教員ですが、授業の場で負の数のたし算ひき算や、かけ算や割り算の意味が納得できていない様子の生徒に出会うことがあります。特に、「分数の割り算はなぜひっくり返してかけるのか」については、多くの生徒が不思議だと思っている様子を目の当たりにしています。しかし、なかなか、数の演算についてしっかりと取り上げ、そ

の意味が、高校生らしい高い見地からもう一度見直すという時間を、授業の中で、あるいは補習授業の中で、十分にとることができません。したがって、特別支援を受けている中学校の生徒が、かけ算と割り算の意味、そうして、分数の割り算に十分な理解を示したこの実践には、高い価値を見いださざるを得ません。いつの日か、チャンスを見て、この実践にならい、試せるように、自分自身の準備を進めたいものだと思います。

中高一貫教育校の市立札幌開成中等教育学校の平岩恒逸さんのレポートは、国際バカロレア教育の視点から見た数学教育の本質についての提起でした。

高校の教員であった渡邊勝さんからは、フランスの高等学校の数学教育との比較で、日本にはない類型である経済社会系の数学についての報告がありました。フランスの数学教育には、高校 2 年生から文学系、社会経済系、科学系に分かれます。日本では、文系と理系の区別はありますが、経済社会系の数学をまとまったものとして指導することにはなっていません。そこで、ここに焦点を当てて、この 類型の生徒にどのような問題意識を持たせ、どのような教材をぶつけるのか、ということを問題意識として、検討したものがこのレポートです。

高校数学の枠を越えて、日本の数学教育をどのようにすべきかという視点に立った研究の一端の紹介です。

同じく高校教員の真鍋和弘さんのレポートは、数学史的な視点で等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax \pm by)^2+(ay \mp bx)^2$$

を見たとき、単なる恒等式ではなく数論の歴史を切り拓いたとも言える「ある数を二つの平方数の和であらわす問題」で中心的な働きを示したもので、数学的帰納法の発祥とも言えるフェルマーによる無限降下法とも密接に関連する式であり、フェルマーの数学への愛を支えた等式であることを解説したものです。数学教育に数学への愛と夢を吹き込む報告です。

同様に高校教員の成田收のレポートは、ベクトル教材の扱い方を問題としています。しかし、ベクトルとは、数学史的に見ると、ギッブスが 1880 年頃、複素数、四元数の発見と、グラスマン代数、クリフォード代数の出現を統合して物理学を記述する方法として生まれたものです。ベクトルは四元数の積にあらわれる内積部分とベクトル積部分を分離独立してベクトルという概念に到達したものであるため、ベクトル積を扱わないベクトル教育はあり得ないのではないかという提言と、幾何教育という意味では、第 5 公準に絡んでユークリッド幾何学を定式化したクラインのエルランゲン・プログラムに絡んで、ユークリッド幾何学を平行移動、回転移動、鏡映で変化しない幾何学と捉える視点が伝えられるよう、ベクトル教育でも、内積、ベクトル積を自由に操って、平行移動、回転移動、鏡映の実現ができるようにすることが大切ではないかという提起を含むものです。ある意味でベクトル教材の扱いにとどまらず、日本の学校教育における幾何学教育のあり方についての提言とも受け取れるものです。

いずれにしろ、レポートを提出した人の出身母体はともかくとして、本分科会で扱われた問題は日本の数学教育そのものに対する提言だととらえることができます。その意味で、議論の内容が校種による制限を超えて、豊に展開された数学教育そのものを論じる分科会となっていたと考えられます。

4 レポート一覧

4.1 四角をかけばわかるしょ（かけ・わり表の活用） 山田 美彦 大楽毛中学校

特別支援学級での数学教育課題についてです。かけ算、割り算で計算される文章題が苦手な生徒に対する指導で、かけわり図を用いて指導したところ効果的であったという報告です。

⟶ 概要を読む

4.2 開成の授業の様子　　平岩　恒逸　市立札幌開成中等教育学校

開成中等学校では、国際バカロレアプログラムにのっとった教育が行われています。平岩さんは、そこで中学校 3 年生の数学を担当しています。その様子の紹介です。

⟶ 概要を読む

4.3 仏国高校における経済社会系数学　　渡邉　勝　　道数協会員

フランスの数学教育には、高校 2 年生から文学系、社会経済系、科学系に分かれます。日本では、文系と理系の区別はありますが、経済社会系の数学をまとまったものとして指導することにはなっていません。そこで、ここに焦点を当てて、この 類型の生徒にどのような問題意識を持たせ、どのような教材をぶつけるのか、ということを問題意識として、検討したものです。

⟶ 概要を読む

4.4 フェルマーの愛した等式ー 2 平方和の問題をめぐってー　　真鍋　和弘　札幌英藍高校

フェルマーの愛した数式とは、

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax \pm by)^2 + (ay \mp bx)^2$$

のことです。3 世紀のギリシアの数学者ディオファントスが著した『算術』には、フェルマー の等式に関連する命題が述べられており。「この等式はディオファントスには周知 のことであったに相違ない」とヴェイユは書いています。

⟶ 概要を読む

4.5 ベクトルで幾何教育ー四元数・グラスマン代数・クリフォード代数の視点からー　成田　収

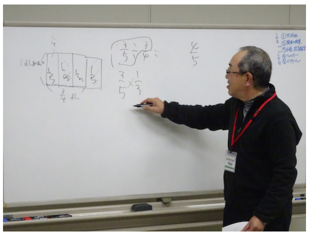
ベクトルはいつ、どのようないきさつで考え出されたものなのか。ベクトルを初めて世の中に出したのは誰なのか。そうして、数学教育の問題として、人々にベクトルで何を伝えるべきなのか、についてのレポートです。

ある資料によれば 1798 年複素数、1843 年四元数、1844 年グラスマン代数、1878 年クリフォード代数が誕生しています。これらの空間を扱う代数を整理統合して、1881 年ベクトル解析がギブスによって誕生します。

⟶ 概要を読む

5　レポートの概要報告

5.1　四角をかけばわかるしょ（かけ・わり表の活用）　　　　　山田　美彦　　大楽毛中学校



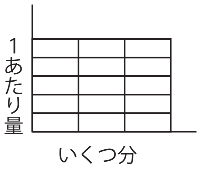
特別支援学級での数学教育課題についてです。かけ算、割り算で計算される文章題が苦手な生徒に対する指導で、かけわり図を用いて指導したところ効果的であったという報告です。

5.1.1　基本形を四角に

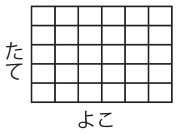
その生徒は、縦かける横で面積が求められることは理解できていました。そこで、そのイメージに合わせて、かけわり図を重ねることによって指導しました。かけわり図の基本形は下の 1 図です。縦かける横が面積を表すイメージは 2 図です。これを重ねると、3 図となります。

1 図

かけ・わり表（基本）

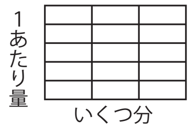


2 図



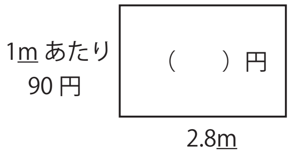
3 図

四角形型　かけ・わり表

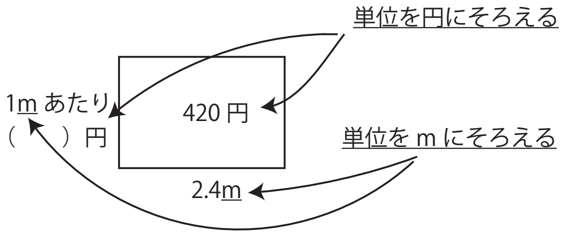


5.1.2　四角の使い方

すると、「1m のねだんが 90 円のリボンがあります。このリボンを 2.8m 買うと、代金はいくらになりますか。」という問題を解くときは、右の図のようになり、$90 \times 2.8 = (162)$ 円 とわかります。

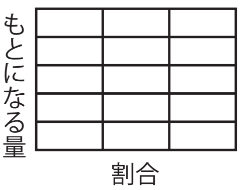


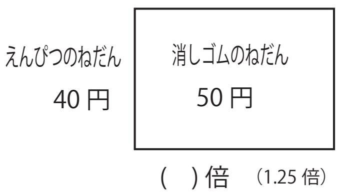
また、「リボンを 2.4m 買うと代金は 420 円でした。このリボン 1m のねだんは何円ですか。」という問題を解くときは、「リボン 1m あたりのねだん」というように、意味から、「あたり」を付け加えて、1 あたり量は「縦」の位置に書くと理解します。その「1m あたり」の単位「m」が「横」の位置に入ります。また、縦の単位「円」と四角形の中の単位「円」をそろえます。



その上で、四角形の中を求めるときはかけ算、四角形の外、縦や横を求めるときは割り算となると理解します。
すると、$420 \div 2.4 = (17.5)$ 円 となります。

5.1.3　倍への応用





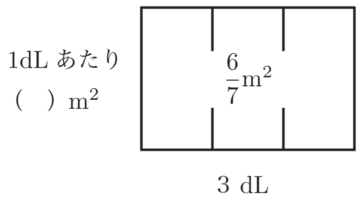
倍、割合、百分率の場合は、倍を基本とします。元になる量が「1 あたり量」の位置を占めますから、これが「縦」にあたります。「横」が「倍」です。

「40 円の鉛筆と 50 円の消しゴムと 110 円のノートがあります。」「消しゴムのねだんは、鉛筆の何倍ですか」という問

題は、鉛筆の値段 40 円が「縦」です。比較されるものは消しゴムの値段 50 円です。これが四角の中に入ります。すると、50 円 $\div$ 40 円 $=$ 1.25 倍 であることがわかります。

5.1.4　分数の割り算の理解への応用

「3 dL のペンキで $\frac{6}{7}\mathrm{m}^2$ のかべがぬれます。1dL では、何 m^2 のかべがぬれますか。」



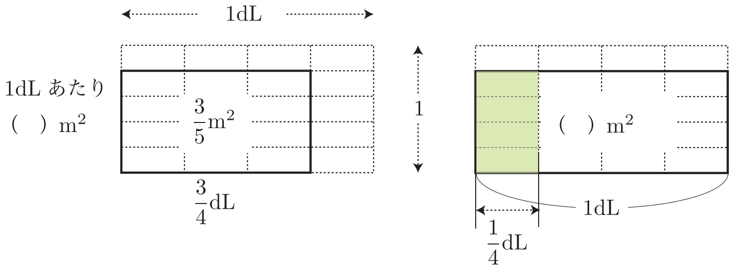
という問題についても、「1dL では、何 m^2 のかべがぬれる」というのが 1 あたり量ですから、これが「縦」です。すると、3 dL は単位の位置をそろえる考え方から、「横」になります。同様に、$\frac{6}{7}\mathrm{m}^2$ が四角の中になります。

これから、　$\frac{6}{7} \div 3 = \frac{2}{7}$ となり、

四角の図から、これが $\frac{6}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$ と同じことを意味することがわかります。

さらに、「$\frac{3}{4}$dL のペンキで $\frac{3}{5}\mathrm{m}^2$ のかべがぬれます。1dL では、何 m^2 のかべがぬれますか。」

という問に対して、同様に、$\frac{3}{5} \div \frac{3}{4}$ で計算できることを確認します。



この計算は、また、別な方法で考えられます。

つまり、図で、$\frac{1}{4}$dL あたり何 m^2 のかべがぬれるかを求めてから、それを 4 倍すると 1dL でぬれるかべの広さがわかります。すなわち、$\frac{3}{5}$dL を 3 等分した一つを 4 倍することで計算ができるので、$\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times 4$ で計算することができることがわかります。

これで、$\frac{3}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3}$ となり、逆数をかけて求めることができることがわかります。

レポート一覧に戻る

5.2 開成の授業の様子

平岩　恒逸　札幌開成中等学校

開成中等学校では、国際バカロレアプログラムにのっとった教育が行われています。平岩さんは、そこで中学校 3 年生の数学を担当しています。その様子の紹介です。

国際バカロレアのカリキュラムは、初等教育プログラムの PYP（3 歳から 11 歳対象）, 中等教育プログラムの MYP（11 歳から 16 歳対象）, ディプロマ資格プログラムの DP、職業訓練の CP（16 歳から 19 歳対象）があります。

開成は、15 年度に入学した 1 期生 160 名に MYP プログラムでの教育を 4 年間実施し、19 年度から 2 年間 DP プログラムで教育を実施することになります。公立学校としては日本で初めての国際バカロレア教育の認定校です。国際バカロレアプログラムは、生涯にわたって探求的に学ぶ精神を獲得した、世界の平和に貢献する知識、思考力を持ち、信念を持って挑戦し続けることのできる、思いやりに富んだ人格の育成を目的としています。

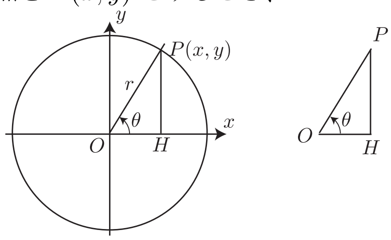
また、数学を学ぶことについても、次のようにとらえています。

> 数学は、強力な世界共通語であり、その獲得により論理的、抽象的、かつ批判的な思考を身につけることができるものであり、世界を理解するための有効な手段である。数学を用いることでさまざまな現象を正確に描写することができる。数学は、すべての生徒が学習できる科目でなければならず、かつすべての生徒が学習すべき科目である。数学の学習は、公式や計算方法の習得に終始すべきものではなく、自らが概念や関係性の探究に積極的に関与することができるものと考え、数学は探究の醍醐味と発見の喜びに満ちた科目である。探究と応用を促すことにより、実生活で役立つ、学問分野の枠を超えた問題解決手法を身につけることができる。（「数学」指導の手引き `https://www.ibo.org/contentassets/93f68f8b322141c9b113fb3e3fe11659/myp/myp-mathematics-guide-jp.pdf` から一部抜粋変更した上で引用）

つまり、数学そのものを学ぶというよりは、それによって、「論理的、抽象的、かつ批判的な思考を身につける」ことが重要であり、その結果「実生活で役立つ、問題解決手法を身につける」ことが目的になっていることが、少々狭い考え方であることを除けば、「すべての生徒が学習できる科目でなければならない」ことや「数学は探究の醍醐味と発見の喜びに満ちた科目である」と考えることなど、共感を呼ぶものです。

今回の報告内容は三角比・三角関数についての授業実践です。
Lesson 1,2 は次のような内容です。

1. 三角関数の導入は、腕の長さが 10m の観覧車において、腕が水平線と $0°, 30°, 45°, 60°, \cdots$ のとき、回転の中心を原点とするときの高さや水平方向の距離を求める問題を扱います。すると、はじめから、一つの角が $30°, 45°$ である直角三角形の辺の比が問題となります。
2. この課題の後、原点 O を中心とする半径 r の円を角度 θ の動径が切る点を $P(x, y)$ とするとき、
$\dfrac{y}{r} = \sin\theta, \dfrac{x}{r} = \cos\theta, \dfrac{y}{x} = \tan\theta$ を三角関数の定義とします。
　また、同時に、P から x 軸に下ろした垂線の足を H として、直角三角形 OPH に着目するとき、三角比を
$\dfrac{PH}{OP} = \sin\theta, \dfrac{OH}{OP} = \cos\theta, \dfrac{HP}{OH} = \tan\theta$ と定義します。



3. θ に対して $r, P(x, y)$ の具体的な値を与えたときに、$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ を求めることを問題とします。
4. 直角三角形の 2 辺の長さと、注目する角 θ を与えたときに、その三角比を求めることです。
5. ここで、はじめて三角比が、相似な直角三角形においては同じ値を与えることが議論されます。（本来、$\sin\theta$ というように、角 θ のみを用いて表示されるためには、大きさによらないことが議論されていなければならないところです。）

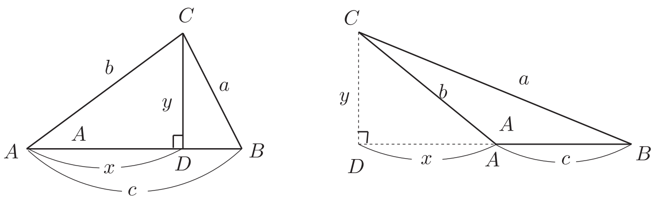
6. 直角三角形の各辺の長さを r, x, y として、一つの角を θ とするとき、r と $\sin\theta, \cos\theta$ を知って、x, y の長さを求める問題を扱います。

次の、Lesson 3,4 は単位円を導入して、三角関数を扱います。

1. $0 \leqq \theta \leqq 360^\circ$ のいろいろな角に対する三角関数 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の値を求める問題
2. $\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$ などの関係式
3. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ などの関係式
4. $\sin\theta$ の値を知って、θ の値を求める問題なども扱われます。

Lesson 5,6 では正弦定理、余弦定理が扱われます。

1. 同じ大きさの円をクラス全員にもたせて、任意に内接三角形 ABC を描かせ、$\dfrac{BC}{\sin A}$ を測定します。各人の三角形が異なるにもかかわらず、この値が一致することから正弦定理が予測されます。
   この後、円周角が等しいことに着目し幾何学的な証明をします。
2. また、余弦定理も次の図から代数的に導出されます。



いくつかのことが議論されました。

一つは、三角関数と三角比は異なるものなので、同じものとして扱う立場はいかがなものかという点についてです。ここで扱われている、テーマは測量や、正弦定理や余弦定理なので、三角比のテーマで扱われる諸事項です。ここに、三角関数が所々に扱われているのですが、関数としての働きはほとんど機能していません。三角関数と三角比では扱われるべき文脈が異なるのと考えられるので、それぞれの文脈の中で指導してはどうかでという指摘です。

もう一つは、三角比の定義で、直角三角形の斜辺を 1 としてその高さと底辺の長さとして $\sin\theta, \cos\theta$ を定義する方法のほうが優れているのではないかという指摘です。

他にも、三角比・三角関数が題材としてとりあげられる前段に、空間、時間、位置の概念を明らかにする道具立てとして注目する問が投げかけられています。pre-post refrection として、三角関数の探求の前と後に考察をする事項として取り上げられているのは、

０．探求の主題は「時間や場所、空間という要素は事象にどのような影響を与えるか？」ということであり、

１．事実の確認として、時間や場所によって変化する事象にはどのようなものがあるか？

２．概念として、三角関数で時間や場所、空間によって変化する事象をどのように表現できるか？

３．議論に関する質問として、三角関数は科学技術の発展にどのように寄与しているか？

という 3 つの視点です。

三角関数を学ぶ前と後でこれがどのように変化するかを評価するためのものと思われますが、これらの内容は、「関数」概念や「運動」の記述に関するものであり、三角比教材の導入の前提となり得るかという意味で、整合性が保たれているかが話題になりました。

しかし、この「pre-post refrection」は、うまく構成すれば、数学のテーマを学び始める前に、生きている人間として何を疑問に思い、何を解決する契機として、次に学ぶテーマを考えるのかという動機を与える可能性があります。そういう意味では、大切な試みと考えることができます。この点は、「余計なことは考えずに成績が良くなるように勉強をせよ」という乱暴な教育が日本にあるとすれば、国際バカロレア教育プログラムから学ばなければならない点ではないかと感じます。

レポート一覧に戻る

5.3　仏国高校における経済社会系数学　　　　　　　　　　渡邊　勝　　道数協会員

フランスの数学教育には、高校 2 年生から文学系、社会経済系、科学系に分かれます。日本では、文系と理系の区別はありますが、経済社会系の数学をまとまったものとして指導することにはなっていません。そこで、ここに焦点を当てて、この類型の生徒にどのような問題意識を持たせ、どのような教材をぶつけるのか、ということを問題意識として、検討したものがこのレポートです。

ある資料によれば、フランスの高等学校の指導要領は次のようになっています。
フランスの指導要領、高等学校数学の領域

<table>
<tr><th></th><th>1 年次</th><th>2 年次</th><th>3 年次</th></tr>
<tr><td>科学系</td><td rowspan="3">統計
計算と関数
幾何</td><td>幾何，解析，確率・統計</td><td>必修：幾何，解析，確率・統計
必修選択：数論，幾何</td></tr>
<tr><td>経済社会系</td><td>必修：資料の処理と確率，代数と解析
必修選択：関数，空間幾何，行列</td><td>必修：解析，統計・確率
必修選択：グラフ，数列，空間幾何</td></tr>
<tr><td>文学系</td><td>必修：数値情報，統計，増大の事例，
オープン活動
必修選択：数論，解析，統計・確率，
幾何，数学的論拠</td><td>必修選択：数論，解析，統計・確率，
幾何，数学的論拠</td></tr>
</table>

今回、渡邊さんが調べたのは、教科書、*Maths Déclic Terminal, ES(spécifique, spécialité), L(spécialité) Édition* 2016 *Hachette Éducation* 社 2016 年出版 です。*Terminal* は最終学年用という意味で *ES* は *Économique et sociale* 経済社会系、*L* は、*littérature* 文学系を意味します。
spécifique, spécialité は固有の、専門という意味で選択科目を意味します。
目次は、

1. 数列
2. 連続関数、凸関数
3. 指数関数
4. 対数関数
5. 積分
6. 確率
7. 連続確率則
8. 標本抜き取り、推定
9. 専門教育課程；モデル化の問題と方法（行列、グラフ理論）

となっています。

フランスの指導要領によれば、専門教育課程では正方行列、列ヴェクトル、演算、逆行列、グラフ、頂点、隣接頂点、辺、角、グラフの次数、長さ、鎖長、完成グラフ、結合グラフ、オイラー鎖、グラフに対応する隣接行列、重み付きグラフ上の最短経路探査、2 頂点または 3 頂点の確率グラフ、遷移行列、確率グラフの安定状態を扱うことになっています。

今回のレポートは、上に述べた教科書の 6 章の翻訳紹介です。
高 2 相等の数学で、既に基礎概念を獲得しているので、ここでは、確率変数、ベルヌーイ試行・2 項分布則、条件付き確率、積の定理（交集合の確率)、全事象の分割、全確率の定理、そして加重樹形図の利用が目標となります。

例題や問題は実社会で経験するであろう事柄に基礎をおいています。「コンサート座席立ち見席問題、高校生のスポーツクラブ参加、マルチメディア量販店での故障受付、フランス旅行と滞在日数」などが扱われています。日本の教科書に多い、トランプ、サイコロ、袋玉問題はほとんどありません。

つまり、日本の教科書に見られる根源事象が同様に確からしい確率の問題に偏重することがありません。

「同様に確からしい」根源事象からなる全事象 Ω の空間で、事象を A それらの場合の数を $N(\Omega), N(A)$ として、事象 A の確率を $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$ と定義するラプラス流の確率論からコルモゴロフ[*1]による確率の定義による確率論への転換が必要であるといいます。つまり、根源事象が $A_1, A_2, \cdots, A_n$ で $A_i \cap A_j = \emptyset$ かつ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ のとき、事象の確率 P を次のように定める。$P(A_i) = p_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ で $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ をみたすものである。ここでは p_i がいつも同じ確率で「同様に確からしい」とは限らない。「確率則」として事象に確率を与えることになる。

実際の教科書の構成は次のようになっています。

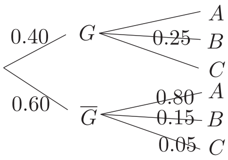
1. 離散確率則として
   確率変数と確率則（確率分布表）およびベルヌーイ試行と二項分布則を学ぶ
2. 条件付き確率
   $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
   加重樹形図（確率重み付き樹形図）および
   $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ を扱う
3. 加重樹形図と条件として
   確率が 0 でない事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が $A_i \cap A_j = \emptyset$ でかつ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ であるとき、これらは全事象を分割する。
   特に、$A, \overline{A}$ は全事象 Ω を分割する。
   全確率の公式；事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が全事象 Ω を分割するならば、任意の事象 B に対して、
   $$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{aligned}$$
   特に、$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
4. 「条件付き確率を扱う」として次のベイズの定理による問題を扱っている。
   マルチメディア量販店で、この二年前までに売れたテレビに関するアンケート調査をした。販売した製品が起こした故障の数を調べている。
   テレビの 40 %が 2 年間の保証がついている。その内 4 分の 1 が故障が 1 つだけである。
   2 年保証しているテレビで故障が 1 つもないものは全体の 28 %である。
   2 年保証がないテレビの中で、80 %には故障が一つもなく、15 %に故障が 1 つだけである。
   1）この量販店で、２年前までに売れたテレビを一台無作為に選ぶ。
      ・G「2 年間の保証がついたテレビである」　・A「1 つも故障しないテレビである」
      ・B「１箇所だけ故障したテレビである」　・C「2 カ所以上故障したテレビである」
      この状況を説明する加重樹形図を作成せよ
   2）2 年間保証がついていることを知って、そのテレビには何の故障もない確率を計算せよ。
   3）いかなる故障もないテレビである確率を計算せよ。

[*1] アンドレイ・ニコラエヴィッチ・コルモゴロフ（ロシア語: Андре́й Никола́евич Колмого́ров , ラテン文字転写: Andrei Nikolaevich Kolmogorov）ロシアの数学者であり、確率論および位相幾何学の大きな発展に寄与した。彼以前の確率論はラプラスによる「確率の解析的理論」に基づく古典的確率論が中心であったが、彼が「測度論に基づく確率論」「確率論の基礎概念（1933 年）」で公理主義的確率論を立脚させ、現代確率論の始まりとなった。Wikipedia から

4）いかなる故障もないテレビであることを知って、そのテレビが 2 年間保証を受けている確率を計算せよ。

5. 解答

1）



2）$P_G(A)$ を求める。 $P_G(A) = \dfrac{P(G \cap A)}{P(G)} = \dfrac{0.28}{0.4} = 0.7$

3）$P(A) = P(G \cap A) + P(\overline{G} \cap A) = P(G \cap A) + P(\overline{G}) \times P_{\overline{G}}(A) = 0.28 + 0.6 \times 0.8 = 0.28 + 0.48 = 0.76$

4）$P_A(G) = \dfrac{P(A \cap G)}{P(A)} = \dfrac{0.28}{0.76} = 0.368$

このように、ベイズの定理がこの章の到達目標になっていると考えられます。

レポートの最後に、渡邊さんは次のように述べています。科学と数学の狭間の永遠の課題をあぶり出すのと同時に、人が学問と向き合い、その成果を伝える教育という営みと向き合うときの原点を示しているように思えます。

> 「確率とは何か？」私にはいまだに解けない難問である。かつて、ガリレオ・ガリレイが落体の原因をあれこれ言う哲学者を尻目に、実に精密な実験をして落体の運動法則を見つけ、後のニュートンによる重力作用に結びついた故事に習い、確率が持つ性質を厳密に検討することで確率の正体を見いだすことができるだろうと思っている。　自然は、その運動が極めて豊かである。人知がそれを再構築して何とか自然をつかまえようとしている。一旦つかんだと思っても、その人の技をあざ笑うかのように、自然は裏切り、思いがけない姿を見せる。我々は現代科学の進歩の諸相をみてつくづくそう思う。
>
> しかし、人間は飽くなき好奇心で前へ進もうとする。この人間精神の再生産こそ科学教育に課せられた課題だと思う。私も齢 80 を越えてしまい、人生の「寸法」も見えてきたこの頃、それでも科学教育の一端を担う気構えだけは失っていないつもりでいる。

レポート一覧に戻る

5.4　フェルマーの愛した等式ー 2 平方和の問題をめぐってー　　　真鍋　和弘　札幌英藍高校

フェルマーの愛した数式とは、

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax\pm by)^2+(ay\mp bx)^2$$

のことです。

3 世紀のギリシアの数学者ディオファントスが著した『算術』には、フェルマーの等式に関連する命題が述べられており。「この等式はディオファントスには周知のことであったに相違ない」とヴェイユは書いています。

しかし、「これが明確に記述されるのは 1225 年のフィボナッチの『平方数の書』まで待たなければならなかった。」とヴェイユの『数論』p.11-12 には記載されています。

この等式は数論の生みの親であるフェルマーに受け継がれます。フェルマーは 1630 年代に二つの平方数の和の定理「$p=4n+1$ 型のどの素数 p も必ずただ 1 通りに $p=a^2+b^2$ の形に表せる」の証明の際に重要な働きをします。その後、この定理はガウスによって複素整数という概念を導入して大変エレガントに証明されます。この考え方が、19 世紀以降代数的整数論や類体論として発展していくことにつながります。

真鍋さんは、現在の高校数学では複素数の導入として、虚数単位 i を 2 次方程式 $x^2+1=0$ の根としてのみ説明していますが、i を数論や代数体の拡大の立場から導入する試みも考えられるのではないかと提言しています。さらに、この複素数の現代的表現である行列による表現についても解説をしています。

はじめにあげた等式を 2 つに分けて

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2 \tag{1}$$
$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(ay+bx)^2 \tag{2}$$

として、(1) で $x=b$, $y=a$ とおくと

$$(a^2+b^2)(b^2+a^2)=(ab+ba)^2+(aa-bb)^2$$
$$(a^2+b^2)^2=(2ab)^2+(a^2-b^2)^2 \tag{3}$$

となり、この式はすべてのピタゴラス数を表す有名な恒等式となります。

例えば、　$a=2$, $b=1$ とすると、$5^2=4^2+3^2$
　　　$a=3$, $b=2$ とすると、$13^2=12^2+5^2$
　　　$a=4$, $b=1$ とすると、$17^2=8^2+15^2$
　　　$a=4$, $b=3$ とすると、$25^2=24^2+7^2$
　　　$a=5$, $b=2$ とすると、$29^2=20^2+21^2$
　　　$a=5$, $b=4$ とすると、$41^2=40^2+9^2$

などとなります。

またこの (3) 式は

「ある数 c が平方の和であれば、その平方 c^2 も平方の和である」ことを表しています。

たとえば、$5=1^2+2^2$ であれば、5^2 も平方の和です。

実際、$2\times1\times2=4$, $2^2-1^2=3$ なので、$5^2=25=4^2+3^2$ であることがわかります。

同様に、$13=2^2+3^2$ から、$13^2=12^2+5^2$ がわかります。

また、ディオファントスは『算術』第 3 巻問題 19 で 2 平方和の積はまた 2 平方和として 2 通りに表せることを知っていたと考えられます。それは、

$65=(2^2+1^2)(3^2+2^2)$ に対して、

$65=(2\cdot3+1\cdot2)^2+(2\cdot1-1\cdot3)^2=8^2+1^2$

$65=(2\cdot 3-1\cdot 2)^2+(2\cdot 2+1\cdot 3)^2=4^2+7^2$ と書いていることからわかります。

さらに、65^2 は 2 平方和として次のように 4 通りに表せると述べています。

$$
\begin{aligned}
65^2&=(8^2+1^2)(4^2+7^2)=(8\cdot 4+1\cdot 7)^2+(8\cdot 7-1\cdot 4)^2=39^2+52^2\\
65^2&=(8^2+1^2)(4^2+7^2)=(8\cdot 4-1\cdot 7)^2+(8\cdot 7+1\cdot 4)^2=25^2+60^2\\
65^2&=(8^2+1^2)(8^2+1^2)=(8\cdot 1+1\cdot 8)^2+(8\cdot 8-1\cdot 1)^2=16^2+63^2\\
65^2&=(4^2+7^2)(4^2+7^2)=(4\cdot 7+7\cdot 4)^2+(4\cdot 4-7\cdot 7)^2=56^2+33^2
\end{aligned}
$$

ところで、複素数を導入すると、a^2+b^2 は

$a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ と因数分解されます。

すると、(1) 式は、次のような因数の積の順序交換の計算で自然に証明されます。

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)(x^2+y^2)&=(a+bi)(a-bi)(x+yi)(x-yi)\\
&=\{(a-bi)(x+yi)\}\{(a+bi)(x-yi)\}\\
&=\{(ax+by)+(ax-by)i\}\{(ax+by)-(ay-bx)i\}\\
&=(ax+by)^2+(ay-bx)^2
\end{aligned}
$$

複素数 $z=a+bi$ に対してそのノルム $N(z)$ を $N(z)=N(a+bi)=a^2+b^2$ と約束すると、簡単な計算から、$z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$, $w=x+yi$, $\bar{w}=x-yi$ に対して $N(z)=z\bar{z}=a^2+b^2$ であり、$N(zw)=N(z)N(w)$ や $N(z\bar{w})=N(z)N(\bar{w})$ などがわかります。

すると、$(a+bi)(b-ai)=(2ab)+(a^2-b^2)i$ から、この両辺のノルムをとって、

$$(a^2+b^2)^2=(2ab)^2+(a^2-b^2)^2$$

となり、(3) 式が証明されます。

行列で複素数を表す場合は次のようになります。

$a+bi$ の役割を果たすのは、$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ です。このとき、i な役割は $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ が担います。

$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$ となり $i^2=-1$ に対応します。

そこで、$a+bi=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ と書くことにすると、$\det\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=a^2+b^2=N(a+bi)$ となり、det が N の役割をします。すると、$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & a\\ -a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ab & a^2-b^2\\ -a^2+b^2 & 2ab\end{pmatrix}$ であることから、両辺の det を計算して、

$$(a^2+b^2)^2=(2ab)^2+(a^2-b^2)^2$$

がわかります。

ところで、(1) 式が本当に活躍するのは、フェルマーの 2 平方和の定理においてです。

2 平方和定理というのは、

「p を奇素数とする。$p=4n+1$ 型のとき、p は必ずただ 1 通りに $p=a^2+b^2$（2 平方和）の形に表すことができる。」というものです。

この定理の逆は簡単に証明することができます。任意の整数 a は 4 で割ると 0,1,2,3 あまる数となります。つまり、$4n,4n+1,4n+2,4n+3$ 型のいずれかになります。簡単のために 0 型、1 型、2 型、3 型と書くことにします。任意の整数 a は 2 乗すると a^2 は 0 型か 1 型になります。いま p は奇数なので、a^2 と b^2 はどちらか一方が 0 型、他方は 1 型になる場合しかありません。したがって、a^2+b^2 は 1 型、つまり $4n+1$ 型です。

ところが、この定理そのものの証明はそう簡単ではありません。オイラーでさえ数年かかったと言われています。

真鍋さんのレポートでは、この証明は幾分長くなるのでここでは行わない。
J.H. シルバーマン「はじめての数論：発見と証明の大航海：ピタゴラスの定理から楕円曲線まで」 丸善出版　2014
や　小林昭七　「なっとくするオイラーとフェルマー」 講談社　2003
に詳しい証明が載っているので参考にして欲しい、として、証明のあらましのみを紹介しています。

最初はガウスの平方剰余法則である。その中でガウスが発見して証明した
「p が $4n+1$ 型のとき、合同式 $x^2 \equiv -1 \pmod p$ は必ず解を持つ。」
という事実から出発する。

$a = x$, $b = 1$ とおくと合同式なので $a \equiv x$, $b \equiv 1$ としてよい。$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p$ が得られる。この合同式は $a^2 + b^2$ は p の倍数であると読めるから、ある正の整数 k が存在して、

$$a^2 + b^2 = kp \tag{4}$$

が成り立つ。そこでもし、$k = 1$ ならば証明は終わる。

そこで、次に $k > 1$ ならば必ず $0 < k_1 < k$ となるような整数の組 (a_1, b_1) で

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = k_1 p$$

を見つけることができるということがわかれば良いことがわかる。
すると、これを繰り返すと、逆向きの帰納法によって、

$$1 = k_n < \cdots < k_1 < k$$

となる k_n の存在が言えて、証明が完成するという段取りです。

これが、フェルマーの無限降下法とよばれているものの原理です。

オイラーの証明では、この証明の過程で、フェルマーの等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

が重要な役割を果たします。

真鍋さんは、レポートの最後に次のように述べています。

> フェルマーの等式を
>
> $$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = A^2 + B^2$$
>
> と書けば、$a^2 + b^2$ と $x^2 + y^2$ という 2 つの 2 次形式が合成されて、また同じ形の 2 次形式が生み出されている。逆から見れば、2 次形式の分解である。ちょうどロシアのマトリョーシカ人形に見られるような「入れ子構造」になっている。最近では、コンピューター・プログラムの構造が再帰的に繰り返されることをネスティング（nesting）とよぶらしいが、それにも似ている。　2 次形式の理論を作ったのはガウスだが、フェルマーをはじめ多くの数学者たちがこの等式を見て、いろいろなインスピレーションを働かせたに違いない。
>
> 数学の学習は「基礎を覚え、それを応用して終わり」というものではない。新しい数式や公式をじっと見つめ、それからどんなインスピレーションが湧いてくるのか、それらをゆっくりと楽しむことが大切であると最近つくづくと思う。

5.4.1 つけたし

蛇足とは思いますが、真鍋さんが省略した、2 平方和の定理で、等式 (1) が働く場面を、小林昭七 「なっとくするオイラーとフェルマー」を参考にして描写します。
(4) 式から始めます。
$a^2+b^2=kp$ が得られたとします。
この式は、もともと $x^2+1\equiv 0 \pmod p$ から得られたものであると考えてよいので $0<x<p$ で考えれば十分であり、したがって、$0<m<p$ と考えてよいことになります。つまり、$a^2+b^2=kp$ の k は $0<k<p$ と考えてよいことになります。

このとき、a,b を k で割って、
$a=ck+u\ ,\ |u|\leqq \dfrac{k}{2}$
$b=dk+v\ ,\ |v|\leqq \dfrac{k}{2}$ をみたすようにします。
すると、$u^2+v^2=(a-ck)^2+(b-dk)^2\equiv a^2+b^2\equiv 0 \pmod k$ となります。つまり、u^2+v^2 は k で割りきれます。

ところで、$u^2+v^2\leqq\left(\dfrac{k}{2}\right)^2+\left(\dfrac{k}{2}\right)^2=\dfrac{k^2}{2}$ ですから、$k_1=\dfrac{u^2+v^2}{k}$ とおくと、$0<k_1<k$ となります。
この式は、$kk_1=u^2+v^2$ ともあらわされます。

ここで、(1) 式から

$$(u^2+v^2)(a^2+b^2)=(ua+vb)^2+(ub-va)^2 \tag{5}$$

となり、また

$$kk_1kp=(u^2+v^2)(a^2+b^2) \tag{6}$$

であることもわかります。

一方、
$ua+vb=(a-ck)a+(b-dk)b\equiv a^2+b^2\equiv 0 \pmod k$
$ub-va=(a-ck)b-(b-dk)a=ab-bck-ab+adk\equiv 0 \pmod k$ ですから、
$ua+vb$ も $ub-va$ も k の倍数であることがわかり、$\dfrac{ua+vb}{k}\ ,\ \dfrac{ub-va}{k}$ も整数です。
$\dfrac{ua+vb}{k}=a_1\ ,\ \dfrac{ub-va}{k}=b_1$ とおくと、
(5)(6) から、

$$\begin{aligned} kk_1kp&=k^2{a_1}^2+k^2{b_1}^2\\ k_1p&={a_1}^2+{b_1}^2 \end{aligned} \tag{7}$$

となります。この k_1 は $0<k_1<k$ です。

この k_1 が 1 でなければ、同じことを繰り返します。すると、より小さな a_2,b_2 で $k_2p={a_2}^2+{b_2}^2$ となる k_2 が得られます。これを続けると、次々と $k,k_1,k_2,k_3,\cdots$ が得られ、どんどん小さくなっていきますが、これらは正の整数なので、いつか必ず 1 に行き着きます。

そのときには

$$1\cdot p={a_n}^2+{b_n}^2$$

となり、p は 2 平方数の和であらわされることになります。

レポート一覧に戻る

5.5 ベクトルで幾何教育ー四元数・グラスマン代数・クリフォード代数の視点からー　成田　收

ベクトルはいつ、どのようないきさつで考え出されたものなのか。ベクトルを初めて世の中に出したのは誰なのか。そうして、数学教育の問題として、人々にベクトルで何を伝えるべきなのか、についてのレポートです。

ベクトルよりも先に複素数が誕生し、ついで四元数が誕生します。複素数の誕生はガウスによるといっていいのでしょうか。四元数はハミルトンによる発明です。複素数は平面の幾何学を扱うことができます。それと同様に四元数は 3 次元空間を扱うことができます。これとはある程度独立に同時期に誕生したグラスマン代数があります。これは、原点を通る n 次元空間を外積によって記述することができます。さらにこれを発展させたのが、クリフォード代数です。

ある資料によれば 1798 年複素数、1843 年四元数、1844 年グラスマン代数、1878 年クリフォード代数が誕生しています。これらの空間を扱う代数を整理統合して、1881 年ベクトル解析がギブスによって誕生します。一方、ガウスは記号こそ生み出していませんが、1801 年の『整数論』ですでに行列や行列式の概念を使っています。これが、1859 年頃にはケイリーの行列論、シルベスターの行列式ににつながります。1890 年にはリッチによってテンサー解析が開発されます。

これらのうち、ベクトル、行列、行列式、テンサー解析が 20 世紀後半の日本の大学の標準カリキュラムとなりますが、四元数、グラスマン代数、クリフォード代数の系譜は一旦歴史の表舞台から姿を消したように見えます。これが、21 世紀になってコンピューターグラフィックスの世界と関連しながら発展し、幾何代数として登場しました。

ですから、ベクトルの誕生は四元数にあるということになります。
少しその様子を見てみます。

5.5.1 複素数

四元数の原型は複素数にあります。
複素数は $1, i$ を基底とする 2 次元のベクトル空間

$$\{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

に

$$i^2 = -1$$

となるかけ算に関する代数関係式を導入したものです。このような集合を代数、あるいは多元環とよびます。これを $a + bi \longrightarrow (a, b)$ で、平面の点と対応させると、たしざんで平行移動を表すことができ、絶対値が 1 の複素数 $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ のかけ算で原点を中心とする θ の回転を表すことができます。

5.5.2 四元数の構造

四元数とは、$1, i, j, k$ を基底とする 4 次元ベクトル空間

$$\{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

に

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1\ ,\ ij = -ji = k\ ,\ jk = -kj = i\ ,\ ki = -ik = j$$

というかけ算に関する代数関係式を導入した多元環 (代数) です。
$ij \neq ji$ などから、これは可換代数ではありません。
$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ の $q_1 = \alpha$ を q のスカラ部分、$q_1 i + q_2 j + q_3 k = \boldsymbol{a}$ を q のベクトル部分と呼びます。

$q=\alpha+\boldsymbol{a}=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$, $q'=\alpha'+\boldsymbol{a}'=q'_0+q'_1i+q'_2j+q'_3k$ とするとき、

$$qq'=(\alpha+\boldsymbol{a})(\alpha'+\boldsymbol{a}')=\alpha\alpha'+\alpha\boldsymbol{a}'+\alpha'\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'$$

となります。複雑なのは $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'$ の計算ですが、

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'=(q_1i+q_2j+q_3k)(q'_1i+q'_2j+q'_3k)$$

を 2 段に分けてその積を考えると、

$$\begin{array}{ccccc} q_1i & + & q_2j & + & q_3k \\ q'_1i & + & q'_2j & + & q'_3k \end{array}$$

となります。この積から i の項が出てくるのは、$jk=i$ の項や $kj=-jk=-i$ の項がでてくるときですから、

$$\begin{array}{ccc} q_2j & + & q_3k \\ q'_2j & + & q'_3k \end{array}$$

の部分で交差してかけるときです。つまり、$q_2q'_3jk+q_3q'_2kj=(q_2q'_3-q_3q'_2)i$ です。同様に、

$$\begin{array}{cc} q_1i+ & q_3k \\ q'_1i+ & q'_3k \end{array}$$

から、$(q_3q'_1-q_1q'_3)j$

$$\begin{array}{ccc} q_1i & + & q_2j \\ q'_1i & + & q'_2j \end{array}$$

から $(q_1q'_2-q_2q'_1)k$ がでてきます。

$$\begin{array}{ccccc} q_1i & + & q_2j & + & q_3k \\ q'_1i & + & q'_2j & + & q'_3k \end{array}$$

からは、これらの他に $q_1q'_1i^2+q_2q'_2j^2+q_3q'_3k^2=-(q_1q'_1+q_2q'_2+q_3q'_3)$ がでてきます。つまり、ベクトル $\boldsymbol{a}=q_1i+q_2j+q_3k$ とベクトル (q_1,q_2,q_3) を同一視し、
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}'$ の内積を $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'\rangle=q_1q'_1+q_2q'_2+q_3q'_3$
ベクトル積を $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'=(q_2q'_3-q_3q'_2\ ,\ q_3q'_1-q_1q'_3\ ,\ q_1q'_2-q_2q'_1)$ とすると、

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'=-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'\rangle+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}' \tag{8}$$

となることがわかります。
　したがって、

$$qq'=(\alpha+\boldsymbol{a})(\alpha'+\boldsymbol{a}')=\alpha\alpha'+\alpha\boldsymbol{a}'+\alpha'\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'=(\alpha\alpha'-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'\rangle)+(\alpha\boldsymbol{a}'+\alpha'\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}')$$

となります。$(\alpha\alpha'-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}'\rangle)$ がスカラ部分で、$(\alpha\boldsymbol{a}'+\alpha'\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}')$ がベクトル部分です。
　$q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k=\alpha+\boldsymbol{a}$ に対し $q^\dagger=q=q_0-q_1i-q_2j-q_3k=\alpha-\boldsymbol{a}$ を考え、これを q の共役と呼びます。すると、

$$qq^\dagger=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2+\alpha\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2$$

となることがわかります。
ここで、$\|q\|=qq^\dagger=q^\dagger q=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$ と約束し、q のノルムと呼びます。$\|q\|$ は q の大きさを表すことにします。すると、

$$q\left(\frac{q^\dagger}{\|q\|^2}\right)=\left(\frac{q^\dagger}{\|q\|^2}\right)q=1 \tag{9}$$

となるため、$\left(\dfrac{q^\dagger}{\|q\|^2}\right)$ は q の逆元 q^{-1} であることを示しています。

ノルムが 1 の四元数 q を単位四元数と呼びます。
これと四元数とみなしたベクトル $\boldsymbol{a}$ との $q\boldsymbol{a}q^\dagger$ の形の積を考えます。
すると、その共役が

$$(q\boldsymbol{a}q^\dagger)^\dagger = q^{\dagger\dagger}\boldsymbol{a}^\dagger q^\dagger = -q\boldsymbol{a}q^\dagger$$

となります。四元数の共役が符号を変えるだけであるので、これはベクトルです。これを、$\boldsymbol{a}'$ と表すことにします。

$$\boldsymbol{a}' = q\boldsymbol{a}q^\dagger \tag{10}$$

その 2 乗ノルムは次のようになります。

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}'\|^2 = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}'^\dagger = (q\boldsymbol{a}q^\dagger)(q\boldsymbol{a}^\dagger q^\dagger) = q\boldsymbol{a}q^\dagger q\boldsymbol{a}^\dagger q^\dagger = q\boldsymbol{a}\|q\|^2\boldsymbol{a}^\dagger q^\dagger \\ = q\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\dagger q^\dagger = q\|\boldsymbol{a}\|^2 q^\dagger = \|\boldsymbol{a}\|^2 qq^\dagger = \|\boldsymbol{a}\|^2\end{aligned}$$

であることから、写像

$$f_q : \boldsymbol{a} \longrightarrow \boldsymbol{a}' = q\boldsymbol{a}q^\dagger$$

は、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{a}'$ へのノルムを変えない線形写像であることがわかります。
すなわち、f_q は半径 $\|\boldsymbol{a}\|$ の 3 次元球面から自分自身への写像であり、球面上の 2 点間の距離を変化させないことから、回転あるいは回転と鏡映を組み合わせた運動を起こすことがわかります。さらに、f_q が連続な写像であることから、f_q は鏡映の可能性はなく、回転であることがわかります。

四元数のまとめ

4 次元ベクトル空間にある積を定義した代数である四元数の中には 3 次元空間が含まれていて、3 次元空間の幾何学である平行移動や回転を四元数の演算で表すことができる。
特に、3 次元空間を表す四元数のベクトル部分の積

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}' = -\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'\rangle + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'$$

がベクトルの内積とベクトル積の組み合わせであること、さらに、両側から挟んだ積である

$$\boldsymbol{a}' = q\boldsymbol{a}q^\dagger$$

が回転を表すことは、象徴的である。

5.5.3 グラスマン代数

グラスマン代数では部分空間を生成する外積 $\wedge$ が新しく定義されます。$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ で 2 次元部分空間 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ で 3 次元部分空間が生成されます。また、双対という概念が作られ、$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})^*$ で $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ の直交補空間があらわされ、$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ の双対と呼ばれます。

このグラスマン代数を正規直交基底で表すと、3 次元空間の場合、

$$\begin{gathered}e_1\wedge e_1 = e_2\wedge e_2 = e_3\wedge e_3 = 0 \\ e_2\wedge e_3 = -e_3\wedge e_2, e_3\wedge e_1 = -e_1\wedge e_3, e_1\wedge e_2 = -e_2\wedge e_1\end{gathered}$$

という関係式をみたします。すると、$1, e_1, e_2, e_3$ で生成されるベクトル空間における $\wedge$ 積を上の関係式で定義した代数を考えることができ、この空間ではすべての要素が、

$$a \cdot 1 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2 + d \cdot e_3 + f \cdot e_2 \wedge e_3 + g \cdot e_3 \wedge e_1 + h \cdot e_1 \wedge e_2 + i \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

と表される 8 次元空間となります。

つまり、グラスマン代数は、3 次元の場合、$1, 1, e_1, e_2, e_3, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ で生成されるベクトル空間に外積 $\wedge$ を $e_1 \wedge e_1 = e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = 0, e_2 \wedge e_3 = -e_3 \wedge e_2, e_3 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1$ をみたすものとして定義した、代数と考えることができます。

5.5.4 クリフォード代数

これと同様に、クリフォード代数は、$1, e_1, e_2, e_3$ で生成される 4 次元ベクトル空間に積を

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \tag{11}$$

$$e_2e_3 = -e_3e_2 \ , \ e_3e_1 = -e_1e_3 \ , \ e_1e_2 = -e_2e_1 \tag{12}$$

で定義した代数です。

この場合、クリフォード代数のすべての元は、

$$a \cdot 1 + b \cdot e_1 + c \cdot e_2 + d \cdot e_3 + f \cdot e_2e_3 + g \cdot e_3e_1 + h \cdot e_1e_2 + i \cdot e_1e_2e_3$$

と表される 8 次元空間となります。

このクリフォード代数は四元数代数、グラスマン代数を内部に含み、クリフォード代数と四元数代数を拡張したものになっています。

クリフォード代数の元のうち $\mathcal{A} = a \cdot 1 + f \cdot e_2e_3 + g \cdot e_3e_1 + h \cdot e_1e_2$ のように e_i の偶数個の積のみを含む元を偶多重ベクトル、$\mathcal{B} = b \cdot e_1 + c \cdot e_2 + d \cdot e_3 + i \cdot e_1e_2e_3$ のように奇数個の積のみを含む元を奇多重ベクトルといいます。

偶多重ベクトルどうしの積はまた偶多重ベクトルになるので、偶多重ベクトルの全体はそれ自身で代数をなします。このようなものを部分代数系といいます。この部分代数系は四元数と一致します。

実際、$i = e_2e_3 (= -e_3e_2)$, $j = e_1e_3 (= -e_3e_1)$, $k = e_2e_1 (= -e_1e_2)$ とおくと、$ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$ となり四元数の作る代数系と一致することが確認できます。

このクリフォード代数系では $\boldsymbol{a} = a_1e_+a_2e_2 + a_3e_3$, $\boldsymbol{b} = b_1e_+b_2e_2 + b_3e_3$ とすると、

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ab}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$$

$$\boldsymbol{ab} = \langle \boldsymbol{ab} \rangle + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$$

などが成立します。

また、ベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向 $\boldsymbol{a}$ の直線に対する鏡映 $\boldsymbol{x}_\top$ は

$$\boldsymbol{x}_\top = \boldsymbol{axa}^{-1}$$

とあらわされ、法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の平面に関する鏡映 $\boldsymbol{x}_\top$ は

$$\boldsymbol{x}_\top = -\boldsymbol{nxn}^{-1}$$

とあらわされます。

したがって、$\boldsymbol{l}$ に直交するベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とするとき、ベクトル $\boldsymbol{x}$ を回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りに回転させるためには、$\boldsymbol{l}$ を含み、法線が $\boldsymbol{a}$ である平面と法線が $\boldsymbol{b}$ である平面に関する 2 回の鏡映を続けて行えばよいことがわかります。

つまり、ベクトル $\boldsymbol{x}$ を回転軸 $\boldsymbol{l}$ の周りに θ 回転させるためには、$\boldsymbol{l}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ でなす角が $\dfrac{\theta}{2}$ であるベクトルを取り、

$$(\boldsymbol{ba})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{ba})^{-1} \tag{13}$$

をつくればよいことがわかります。

5.5.5　ベクトルで何を伝えるか

ここまでで、ベクトルが四元数やグラスマン代数やクリフォード代数で扱う幾何学を簡明にするためにギブスがこれらの代数系から内積とベクトル積（ここでは触れなかったが、これらとスカラ 3 重積）を取り出し、わかりやすいようにまとめたものだということから、四元数やグラスマン代数やクリフォード代数で内積やベクトル積がどのような姿で現れていたのかということに一端を見てきました。

ここまででわかったことは、内積とベクトル積は、これらの代数における積には同時に現れていたものであるということです。また、これらの積は、空間における幾何学を考えるため、特に、運動や変換を扱うことができる手段として現れていたものであることがわかります。

したがって、ベクトルという単元で何を伝えるかという頃を考えたとき、1 つの目標は「幾何学の研究」「幾何学を扱うこと」だと考えてよいのではないかということです。

もう 1 つは内積とベクトル積をばらばらにしてしまうのはいかがなものかということです。
つまり、ベクトルで伝えることの中心として、内積、ベクトル積（場合によってはスカラ 3 重積も）を扱いながら幾何学を扱うが、その際、幾何学内部に起こっている個々の単独の定理を扱えるようにすることを目標にすることよりも、幾何学が、運動、回転、並進、鏡映（場合によっては拡大縮小）などによって変化しない性質について考える学問であることの契機が伝わるようにすることがたいせつではないか、そのためには、空間の鏡映、回転、がどのように実現するのかということが理解できることが大切ではないかと感じます。

その際、ベクトルで挟む演算、ベクトル作用子の考え方に到達することが 1 つの底流として考えられるのではないかと思います。

いずれにしろ、幾何学教材は高等学校では特にまとまりがなく、目標も定まっていないような気がします。したがって、これらのことを実現する授業書プランの作成と実践がこれからの課題ではないでしょうか。

レポート一覧に戻る